Exo 5 X ensemble, $F_b(X,\mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ |f| \text{ borné} \}$.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \forall f \in F_b(X,\mathbb{R}).$$

2) On remarque d'abord que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $F_b(X,\mathbb{R})$.

- $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = 0 \iff |f(x)| = 0 \ \forall x \in X \iff f(x) = 0 \ \forall x \in X \iff f \equiv 0$.

- (Homogénéité) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |(\lambda f)(x)| = \sup_{x\in X} |\lambda \cdot f(x)| \underset{\text{Homogénéité de } |\cdot|}{=} \sup_{x\in X} (|\lambda|\, |f(x)|) =$

$= |\lambda| \cdot \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

(Inégalité triangulaire) $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |(f+g)(x)| = \sup_{x\in X} |f(x) + g(x)| \underset{\text{(inég. triang. de } |\cdot|)}{\leq}$

$\leq \sup_{x\in X} \left(|f(x)| + |g(x)| \right) \underset{\text{propriété du sup}}{\leq} \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- $\|f\|_\infty < +\infty$ si $f \in F_b(X,\mathbb{R})$: si $f \in F_b(X,\mathbb{R})$, alors par définition, $\exists M < +\infty$ t.q. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in X$. $\Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \leq M$.

Donc $\|f\|_\infty$ est une norme sur $F_b(X,\mathbb{R})$.

Pour avoir un espace de Banach, il faut montrer que $(F_b(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, c'est à dire que toute suite de Cauchy est convergente.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments dans $F_b(X,\mathbb{R})$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall m, n \geq N(\varepsilon), \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

Mais $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in X$.

Il s'en suit que, pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$

est de Cauchy. Comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, pour tout $x \in X$,
la suite $(f_n(x))_n$ converge vers une valeur $l_x \in \mathbb{R}$.

On définit $f_\infty : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto l_x$. Donc on a $f_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(C'est à dire f_n converge ponctuellement à f_∞).

On veut montrer que $f_\infty \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$, et que $\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0$.

Montrons que $f_\infty \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$, c'est à dire, que $\exists M_\infty \geq 0$ t.q. $|f_\infty(x)| \leq M$ $\forall x \in X$.

Fixons un $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = 1$). ~~Par (*), ∃N=N(ε)~~

Soit $N = N(\varepsilon)$ comme dans (*). Comme $f_N \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$, on sait
que $\exists M \ (\geq \|f_N\|_\infty)$ t.q. $|f_N(x)| \leq M$ $\forall x \in X$.

De plus, $|f_\infty(x)| \leq |f_\infty(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_m(x) - f_N(x)| + |f_N(x)|$.

Or, $|f_N(x)| \leq M$, et $|f_m(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$ pour $m \geq N$, par (*).

~~Donc~~ ~~$|f_\infty(x)|$~~ et donc $\lim_{m\to+\infty} |f_m(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$.

Il s'en suit que $|f_\infty(x)| \leq M + \varepsilon$ $\forall x \in X$.

Montrons enfin que $\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, soit $N = N(\varepsilon)$ comme dans (*). Comme dans le point précédent
on obtient que $|f_\infty(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in X$ et donc $\|f_\infty - f_{N(\varepsilon)}\|_\infty \leq \varepsilon$.

De façon analogue on obtient que $\|f_\infty - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

~~Par arbitr~~ Comme on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient $\|f_\infty - f_n\|_\infty \to 0$
pour $n \to +\infty$

b) On peut voir $\mathbb{R}^n$ comme l'espace $F_b(X, \mathbb{R})$, avec $X = \{1, 2, \dots, n\}$.
en effet, on peut associer à $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ la fonction
$f_x(j) = x_j$ $\quad f_x : \{1 \dots n\} \to \mathbb{R}$. $\quad f_x$ est borné, par $\max\limits_{j=1 \dots n} |x_j|$

De plus, la $\|\cdot\|_\infty$ dans $F_b(X, \mathbb{R})$ correspond à la $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$
($\|x\|_\infty = \max\limits_{j=1 \dots n} (x_j|)$. On en déduit que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, toutes normes sont équivalentes (en particulier, à $\|\cdot\|_\infty$). Comme la complétude d'un espace ne dépend que de la classe d'équivalence, on obtient que $\mathbb{R}^n$ est complet pour n'importe quelle norme.

(La donnée $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) & \to & (F_b(\{1 \dots n\}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ x & \mapsto & f_x \end{array}$ est dit isomorphisme d'espaces de Banach).

c) Comme dans (b), $\ell^\infty(\mathbb{R}) = F_b(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et les deux normes coïncident.
Donc $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Pour $\mathbb{R}^d$: $\quad \ell^\infty(\mathbb{R}^d) = F_b(\mathbb{N} \times \{1 \dots d\}, \mathbb{R})$ où sur $\mathbb{R}^d$ on considère la $\|\cdot\|_\infty$.

d) On veut montrer que $\mathcal{C}([-1, 1] \mathbb{R})$ est fermé dans $F_b([-1, 1], \mathbb{R})$
par rapport à la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$.

D'abord, on remarque que $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ est contenu dans $F_b([-1, 1], \mathbb{R})$.
Il suffit montrer que si $f : [\cancel{0}, 1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est bornée.

Mais $[-1, 1]$ est compact, et on a vu en cours que f continue sur $X = [-1, 1]$ compact est bornée.

Soit maintenant $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, qui converge dans $\mathcal{F}_b([-1,1],\mathbb{R})$. C'est-à-dire : $\exists f_\infty \in \mathcal{F}_b([-1,1],\mathbb{R})$ t.q. $\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0$. On veut montrer que $f_\infty \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Mais $\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0$ nous dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f_∞. Comme f_n est continue $\forall n \in \mathbb{N}$, et la limite uniforme de fonctions continues est continue, on en déduit que f_∞ est continue.

c) ~~Tout~~ $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Tout fermé dans un espace métrique complet est complet. (Exo 3 del TD4)

Donc $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

· Pour voir que $\forall F$ fermé dans (E,d) complet est complet :

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans F ($x_n \in F$ $\forall n$).

$F \subseteq E$ donc $(x_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans E.

E complet $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ converge vers un élément $x_\infty \in E$.

F fermé $\Rightarrow$ $x_\infty \in F$, et $(x_n)_n$ est convergente dans F.

Donc F est complet (par rapport à la distance induite par d sur F).

TD 04 (1)

Exo 7 $\ell^1(\mathbb{R}) = \left\{ X : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \|X\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |X(k)| < +\infty \right\}$

$(X_n)_n$, $X_n \in \ell^1(\mathbb{R})$ suite de Cauchy dans $\ell^1(\mathbb{R})$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon), \ \|X_n - X_m\|_1 \leq \varepsilon.$

On veut montrer que $\exists X_\infty \in \ell^1(\mathbb{R})$: $X_n \to X_\infty$ en $\|\cdot\|_1$:
$\|X_n - X_\infty\|_1 \to 0.$

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $|X_n(k) - X_m(k)| \leq \sum_{h=0}^{\infty} |X_n(h) - X_m(h)| = \|X_n - X_m\|_1 \leq \varepsilon.$

b) La propriété (a) dit que $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(X_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(X_n(k))_n$ converge vers une valeur $X_\infty(k) \in \mathbb{R}$.

On veut maintenant montrer que la suite $X_\infty = (X_\infty(k))_k \in \ell^1(\mathbb{R})$.

c) La suite $(X_{N(\varepsilon)}(k))_k$ est une suite dans $\ell^1(\mathbb{R})$, donc.
$\sum_{k=0}^{\infty} |X_{N(\varepsilon)}(k)| < +\infty$. Donc $\sum_{k=K}^{\infty} |X_{N(\varepsilon)}(k)| \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc pour $\varepsilon > 0$
$\exists K \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=K}^{\infty} |X_{N(\varepsilon)}(k)| \leq \varepsilon.$

d) $\forall n \geq N(\varepsilon)$, on a : $\sum_{k=K}^{\infty} |X_n(k)| \leq \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |X_n(k) - X_{N(\varepsilon)}(k)|}_{\leq \|X_n - X_{N(\varepsilon)}\|_1 \leq \varepsilon} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |X_{N(\varepsilon)}(k)|}_{\leq \varepsilon \ (c)} \leq 2\varepsilon$

e) On fixe $L \geq K$. Comme $\lim_{n \to \infty} X_n(k) = X_\infty(k)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, on a : $\forall \delta > 0$, $\exists P = P(\delta, k)$ t.q. $\forall n \geq P$, $|X_n(k) - X_\infty(k)| \leq \delta.$

En utilisant cette propriété pour $K \le k \le L$, on a que :

pour $M(L,K) := \max_{K \le k \le L} P(\delta, k)$, $\forall n \ge M(L,K)$, $\sum_{k=K}^{L} |X_n(k) - X_\infty(k)| \le (L-K+1)\delta$

Si on prenait $\delta = \frac{\varepsilon}{L-K+1}$, on obtient l'estimation voulue.

f) On veut estimer $\sum_{k=K}^{\infty} |X_\infty(k)| = \lim_{L\to\infty} \sum_{k=K}^{L} |X_\infty(k)|$.

On a $|X_\infty(k)| \le |X_\infty(k) - X_n(k)| + |X_n(k)|$. Si $n \ge M(L,K)$, on a.

$$\sum_{k=K}^{L} |X_\infty(k)| \le \underbrace{\sum_{k=K}^{L} |X_\infty(k) - X_n(k)|}_{\underset{(e)}{\le \varepsilon}} + \underbrace{\sum_{k=K}^{L} |X_n(k)|}_{\underset{(d)}{\le 2\varepsilon}} \le 3\varepsilon.$$

Pour $L \to +\infty$ on obtient $\sum_{k=K}^{\infty} |X_\infty(k)| \le 3\varepsilon$, et donc $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |X_\infty(k)|}_{\|X_\infty\|_1} \le$

$\le \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} |X_\infty(k)|}_{< +\infty} + 3\varepsilon < +\infty$. Donc $X_\infty \in \ell^1(\mathbb{R})$.

g) On veut estimer $\|X_n - X_\infty\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |X_n(k) - X_\infty(k)|$.

Comme $X_\infty \in \ell^1(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists H \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{k=H}^{\infty} |X_\infty(k)| \le \varepsilon$.

À moins de prendre un H plus grand, je peux supposer $H \ge K$.

Comme dans (e), $\forall \varepsilon$ $\exists Q(\varepsilon)$ t.q. $\forall n \ge Q(\varepsilon)$, $\sum_{k=0}^{H-1} |X_n(k) - X_\infty(k)| \le \varepsilon$.

Par (c), on a que $\sum_{k=H}^{\infty} |X_n(k)| \le 2\varepsilon$ si $n > N(\varepsilon)$.

Donc $\|X_n - X_\infty\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |X_n(k) - X_\infty(k)| = \underbrace{\sum_{k=0}^{H-1} |X_n(k) - X_\infty(k)|}_{\le \varepsilon \text{ si } n \ge Q(\varepsilon)} + \sum_{k=H}^{\infty} |X_n(k) - X_\infty(k)|$

$\le \varepsilon + \underbrace{\sum_{k=H}^{\infty} |X_n(k)|}_{\le 2\varepsilon} + \underbrace{\sum_{k=H}^{\infty} |X_\infty(k)|}_{\le \varepsilon} \le 4\varepsilon$ si $n \ge \max\{Q(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$.

Comme je peux choisir $\forall \varepsilon > 0$, ~~Donc~~ on a $\|X_n - X_\infty\|_1 \to 0$.